期末考试试题

- 课程： 跨入科学研究之门（XDSY118019）
- 主讲教师：唐萍、刘一新（复旦大学高分子科学系）
- 答案提交截止时间: 2022.11.17, 21:30
- 答案提交方式： 以Pull Request的形式将所有相关材料提交到GitHub repo：https://github.com/liuyxpp/XDSY118019-exam

注意事项

1. 答案提交方式是本次期末考试考察的一个部分，如果不能按时以Pull Request的形式提交考试答案，将判定本次考试不合格。
2. 考试答案包括试题的解、相关代码以及所要求的说明文档（Markdown或LaTeX）。

试题解答要求

1. 将代码（如有）及答案（包括图片）写入一个Markdown或LaTeX或Jupyter notebook文件中。
2. （可选）将上述文件渲染为PDF或HTML格式的文件。

当堂考察试题

1. 测试是编写高质量、可靠代码的重要一环。现有一个Python函数`format_number`可将任一浮点数按要求转化为字符串，其中可选参数`decimals`指定保留几位小数，当该参数为负值时，表示精确到小数点前几位为止。可选参数`last_digit`指定最末尾一位数只能是列表中的数字，如果列表为空，则表示0-9数字均可以。请为该函数设计尽可能全面的测试样例，要求：
   - 至少能覆盖该函数的所有可能的调用方式（按照可选参数是否缺省，比如`format_nubmer(1.414)`即为一种调用方式）。
   - 浮点数要尽可能有代表性，比如正数、负数、大于1的小数、小于1的小数、整数等等。
   - 提交输入的浮点数、函数调用方式和最后返回结果的一个列表。

   注意：该函数的源代码可从该文件所在的Github repo中的format_number.py文件里拷贝使用。
2. 用Python求解线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - 3x_3 + 5x_5 = 1 \\
4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 2 \\
3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 3 \\
x_3 - 4x_4 + 7x_5 = 4 \\
9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 5
\end{cases}
$$

3. Matlab作图。选定参数u, v（取值范围均为$[0, 2\pi]$），请参考课件用`surf`函数画出如下复合函数在(x, y, z)坐标系下的轮廓图：

$$z = f[x(u,v), y(u,v)] = -\cos(u-3v)(5/4+\sin(3u))$$

其中，x, y也是关于u, v的函数，其表达式如下：

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \cos(v)\left[6-(5/4+\sin(3u))\sin(u-3v)\right] \\ y(u,v) &= \sin(v)\left[6-(5/4+\sin(3u))\sin(u-3v)\right] \end{aligned}$$

4. 当$s = 2, 4, 6, 8, 10$时，利用Mathematica求以下表达式的值：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

5. 用LaTeX或Markdown写出如下文本内容（要求渲染后的显示效果与如下文本一致）：

The **Riemann zeta function** or **Euler–Riemann zeta function**, denoted by the Greek letter ζ (zeta), is a mathematical function of a complex variable $s = \sigma + it$ defined as

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

for $\operatorname{Re}(s) > 1$ and its analytic continuation elsewhere. When $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$, the function can be written as a converging summation or integral:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, \mathrm{d}x$$

where

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \, e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

is the gamma function.

In 1737, the connection between the zeta function and prime numbers was discovered by Euler, who proved the identity

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prime}} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

where, by definition, the left hand side is $\zeta(s)$ and the infinite product on the right hand side extends over all prime numbers p (such expressions are called Euler products):

$$\prod_{p \text{ prime}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \frac{1}{1-7^{-s}} \cdot \frac{1}{1-11^{-s}} \cdots \frac{1}{1-p^{-s}} \cdots$$

Both sides of the Euler product formula converge for $\mathrm{Re}(s) > 1$.